

TD N° 10: ELECTROMAGNÉTISME  
**Dipôles électrostatique et magnétostatique**

**DIPÔLES ÉLECTROSTATIQUES**

**EXERCICE N°1: Equivalence d'un système de deux sphères**

On considère la superposition de deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  de même rayon  $R$ , de centre  $O_1$  et  $O_2$ , chargées uniformément en volume avec les densités volumiques respectives  $\rho_1 = -\rho$  et  $\rho_2 = +\rho$ . On pose  $O_1O_2 = a$  et  $\rho \times a = \sigma_0$ . On supposera  $a \ll R$ .

- ❶ Montrer que le champ est uniforme en tout point intérieur aux deux sphères. Préciser sa direction, son sens et son intensité en fonction de  $\sigma_0$ .
- ❷ A quel système électrostatique l'ensemble des deux sphères est-il équivalent pour la région extérieure à ces sphères? Calculer le potentiel et le champ électrique en tout point extérieur aux deux sphères.
- ❸ Montrer que le système des deux sphères est équivalent, pour le champ créé, à une sphère conductrice de rayon  $R$ , de centre le milieu  $O$  de  $[O_1O_2]$ , en équilibre et portant en chaque point  $P$  une charge surfacique:

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta \quad \text{avec } \theta = (\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{OP})$$

**EXERCICE N°2: Modélisation de la molécule de dioxyde de carbone  $CO_2$**

**- Quadrupôle**

Soit un repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

On considère une molécule de dioxyde de carbone, de géométrie linéaire, fortement polarisée, modélisée par un ensemble de 3 charges:

- Une charge  $+2q$  représentant l'atome de carbone situé au centre du repère.
  - Deux charges  $-q$  représentant chacune un atome d'oxygène, et situées l'une en  $(-a, 0)$ , et l'autre en  $(+a, 0)$ .
- ❶ Donner sans aucun calcul l'allure probable des lignes de champ, ainsi que des équipotentielles. Ces dernières peuvent-elles se couper?
  - ❷ Parmi les propositions suivantes, lesquelles pourraient représenter la forme du potentiel en un point  $M(r, \theta)$  (coordonnées polaires) à grande distance  $r$  de l'origine du repère. On justifiera la réponse qui sera donnée en revanche sans aucun calcul.

- |   |   |
|---|---|
| a. $\frac{-2A \cos^2 \theta}{r^3}$      | e. $\frac{-2B \cos^2 \theta}{r^2}$      |
| b. $\frac{A(1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^3}$ | f. $\frac{B(1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^2}$ |
| c. $\frac{A(1 - \cos^2 \theta)}{r^3}$   | g. $\frac{B(1 - \cos^2 \theta)}{r^2}$   |
| d. $\frac{-2A \cos \theta}{r^3}$        | h. $\frac{-2B \cos \theta}{r^2}$        |

- ❸ Déterminer l'expression de  $A$  ou  $B$  suivant la proposition à retenir en calculant cette fois explicitement le potentiel scalaire dit "quadrupolaire"  $V(M, \theta)$  engendré par cette disposition de charges.
- ❹ En déduire l'expression du champ  $\vec{E}$  au point  $M$
- ❺ Montrer que ce champ "vérifie" le théorème de Gauss.

On donne le développement limité suivant :

$$\frac{1}{(1+x)^{1/2}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^3)$$

## DIPÔLES MAGNÉTOSTATIQUES

### EXERCICE N°3: Dipôle magnétique glissant

On considère un dipôle magnétique de moment  $\vec{M} = M \cdot \vec{e}_z$  (constant) mobile le long de l'axe  $[Oz]$  d'une spire de rayon  $R$  parcourue par le courant  $I$  constant délivré par un générateur de courant parfait.

On donne le champ magnétique engendré par une spire de courant  $I$  centrée en  $O$  origine, et de rayon  $R$  en un point  $M(z)$  appartenant à son axe  $[Oz]$  de cote  $z$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)^3 \cdot \vec{e}_z$$

- ❶ Etudier les actions mécaniques subies par le dipôle, puis discuter de l'existence et de la stabilité des éventuelles positions d'équilibre. On pourra tracer l'allure de la courbe donnant la composante de force sur l'axe  $[Oz]$  par exemple.
- ❷ En supposant que le dipôle reste proche de l'origine  $O$ , montrer que la période des petites oscillations autour de  $O$  s'écrit:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2mR^3}{3\mu_0 IM}}$$

### EXERCICE N°4: Superposition d'un champ uniforme et de celui d'un dipôle

On considère la superposition d'un champ uniforme  $\vec{B}_a = B_a \vec{e}_z$ , et du champ  $\vec{B}_M$  créé par un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$  placé à l'origine des coordonnées qui s'écrit, au point  $P$  repéré par ses coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ .

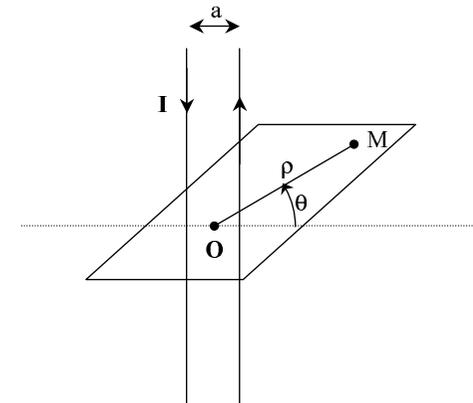
$$\vec{B}_M(P) = \vec{B}_M(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{(3\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right\} \quad \text{avec } \vec{r} = \vec{OP}$$

$\vec{M}$  et  $\vec{B}_a$  sont reliés par  $\vec{M} = -\left(\frac{2\pi R^3}{\mu_0}\right) B_a \vec{e}_z$  où  $R$  est une longueur donnée.

- ❶ Expliciter, pour cette valeur de  $\vec{M}$ , le champ  $\vec{B}_R = \vec{B}_a + \vec{B}_M$ , en fonction de  $B_a, \vec{e}_z, \vec{r}$ , et  $R$ .
- ❷ Calculer le produit scalaire  $\vec{B}_R \cdot (r \cdot \vec{e}_r)$  en un point quelconque.
- ❸ En déduire que  $\vec{B}_R$  est tangent à la sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  en chacun de ses points. Où l'intensité du champ au voisinage de la sphère est-elle maximale ?
- ❹ Donner un tracé approximatif des lignes de champ de  $\vec{B}_R$  à l'extérieur de cette sphère.

### EXERCICE N°5: Dipôle cylindrique

On considère un circuit parcouru par un courant  $I$ . On s'intéresse ici à une portion du circuit telle que les fils d'aller et de retour du courant sont parallèles, supposés infinis et distants de  $a$ .



- ❶ Déterminer le champ magnétique résultant en tout point  $M$ .
- ❷ Que devient ce champ si l'on suppose  $a \ll r$ ? Commenter ce résultat.

### EXERCICE N°6: Précession de spin dans un champ magnétique

Nous avons dégagé en cours le lien de proportionnalité existant entre le moment cinétique propre  $\vec{L}_0$  d'une particule et son moment magnétique propre  $\vec{m}$ :

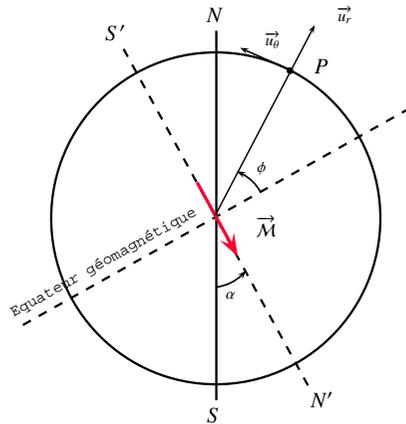
$$\vec{m} = \gamma \cdot \vec{L}_0$$

Cet exercice vis à étudier le comportement mécanique d'une telle particule lorsqu'elle est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}$ .

- ❶ Déterminer une équation différentielle vectorielle régissant l'évolution de  $\vec{m}$ .
- ❷ A l'instant initial, le moment dipolaire magnétique fait un angle  $\alpha$  connu avec le champ magnétique extérieur. Décrire le mouvement observé.
- ❸ Que pensez-vous de l'énergie d'interaction entre le moment dipolaire et le champ magnétique au cours de ce mouvement?
- ❹ Connaissez-vous un système mécanique macroscopique décrivant un mouvement identique dans un champ de pesanteur uniforme?

**EXERCICE N°7: Etude du champ magnétique terrestre**

La Terre possède un champ magnétique intrinsèque appelé champ géomagnétique, provenant du mouvement de particules chargées dans son noyau fluide. En première approximation, ce champ est celui d'un dipôle magnétique placé au centre  $O$  de la Terre de moment dipolaire  $\vec{M}$ , présentant une inclinaison  $\alpha = 11^\circ$  par rapport à l'axe de rotation terrestre tel que  $\frac{\mu_0 \vec{M}}{4\pi} = 8,3 \cdot 10^{15} \text{ T} \cdot \text{m}^3$ .



Son axe Sud-Nord, appelé axe géomagnétique, est inversé par rapport à l'axe géographique. Le grand cercle de la surface terrestre de centre  $O$  et perpendiculaire à l'axe géomagnétique est appelé équateur géomagnétique. On appelle  $R = 6378 \text{ km}$  le rayon de la Terre supposé sphérique. Un point  $P$  est repéré par sa latitude géomagnétique  $\Phi$ , égale à l'angle formé entre le plan de l'équateur géomagnétique et le vecteur  $\vec{OP}$ .

- ❶ Déterminer à la surface de la Terre l'intensité  $B = \|\vec{B}\|$  du champ géomagnétique et son inclinaison  $I = (\vec{B}, \vec{u}_\theta)$  par rapport à l'horizontale en fonction de  $\phi$ . Donner les valeurs numériques théoriques de  $B$  et de  $I$ , ainsi que le sens du champ géomagnétique à Paris, sachant que  $\phi_{Paris} = 52^\circ$  et commentez les valeurs expérimentales:

$$B_{exp}(Paris) = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad \text{et} \quad I_{exp}(Paris) = -64,5^\circ$$

- ❷ Justifier le fait qu'une boussole s'approchant de l'un des deux pôles géomagnétiques devient «folle».
- ❸ On étudie maintenant le champ géomagnétique dans l'espace. Pour une ligne de champ de distance équatoriale  $r_e$ , on définit le paramètre de Mac Ilwain  $L = \frac{r_e}{R}$ . Etablir l'équation polaire des lignes de champ magnétique. En déduire l'expression numérique de  $B$  sur une ligne de champ en fonction de  $L$  et de  $\phi$ , ainsi que les deux latitudes  $\pm\phi_m$  où elle traverse la surface terrestre.

**Résolution de problème**

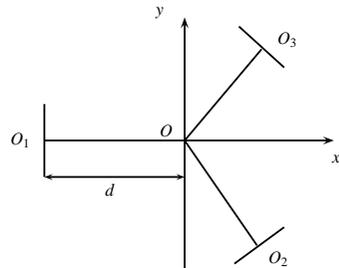
**EXERCICE N°8: RÉSOLUTION DE PROBLÈME: principe du moteur synchrone**

**- moteur des TGV/AGV 2nde génération)**

Le programme de modernisation technique des rames de TGV a conduit au début des années 90 à remplacer les moteurs à courant continu qui équipaient les premières versions par des **moteurs synchrones**. Ils présentent en effet plusieurs avantages: poids et, encombrement inférieur, électronique simplifiée, et meilleur rendement. L'exercice qui suit vise à en présenter le principe général.

Trois bobines identiques constituant le stator du moteur sont placées autour du point origine  $O$  dans les directions repérées par les angles  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\pi$ , et  $\frac{5\pi}{3}$ , comme indiqué sur la figure.

Chaque bobine engendre en  $O$  un champ magnétique dirigé selon son axe et proportionnel au courant que la traverse, et d'amplitude  $B_0$ .



PARTIE EXERCICE GUIDÉ:

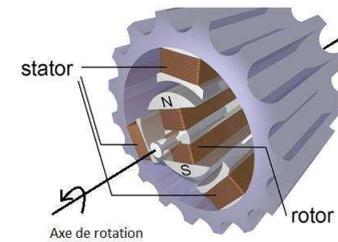
- ❶ On s'intéresse au champ total  $\vec{B}$  engendré en  $O$  par les trois bobines, celles-ci étant parcourues par les courants  $I_1$ ,  $I_2$ , et  $I_3$  respectivement. On exprimera ce champ à l'aide de l'amplitude  $B_0$  précédente.
  - a. Que vaut  $\vec{B}$  en  $O$  si  $I_1 = I_2 = I_3 = I$ ?
  - b. Que vaut  $B$  si les trois courants correspondent à une alimentation triphasée de pulsation  $\omega$ , c'est à dire si:

$$I_n = I \cdot \cos\left(\omega t - (n - 1)\frac{2\pi}{3}\right)$$

- ❷ L'alimentation triphasée est conservée, et le rotor du moteur, représenté par un circuit de moment dipolaire de moment  $\vec{M}$ , tournant à la pulsation  $\Omega$  dans le plan  $(xOy)$ , est placé en  $O$ . Initialement ( $t=0$ ), l'angle faisant passer de la direction de  $\vec{M}$  à celle du champ engendré par les bobines vaut  $\varphi_0$ .
  - a. Calculer le couple moyen subi par le dipôle. A quelle condition est-il non nul?
  - b. Dans ce cas, étudier le couple en fonction de l'angle initial  $\varphi_0$  entre  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$ , et indiquer la zone où le système fonctionne en moteur ainsi que sa limite d'utilisation, c'est à dire le couple maximal qu'il peut fournir.
  - c. Un tel moteur peut-il démarrer seul, éventuellement à vide? Justifier clairement.

PARTIE PROBLÈME:

Lorsqu'il fait avancer le train, le moteur du TGV est dit «en charge»; cette charge correspond à l'inertie de l'ensemble de transmission en contact avec les rails et que le moteur fait tourner; en outre des frottements solides (frottements dits «secs») interviennent dans la rotation de l'ensemble de transmission.



A partir des résultats de la partie «exercice guidé» ci-dessus, montrer par une modélisation simple du système moteur complet (schéma requis) que lors de son fonctionnement, c'est à dire lorsqu'il fait avancer le train, le moteur du TGV possède deux zones de fonctionnement dont **une seule est stable**, l'autre conduisant à l'arrêt du moteur synchrone, et donc du train. Commenter les limites du système moteur.